数学における概念拡張の二つの様式

八杉　滿利子

数学の各理論の発展に際しては様々な拡張が行われる。多くの場合それは数学の実践自体から、すなわち数学の内部からの要請があるからだ。拡張には対象領域の拡張、演算あるいは関係などの定義域の拡張、新しい演算の導入などが含まれる。これらを総合すると、何等かの意味の新しい概念形成、あるいは概念拡張と表現できよう。概念拡張に際してなんらかの必要性に応じて拡張の方向が決まってゆく。しかし当然新概念がそれまでの知識から自動的・機械的に導かれるわけではない。

概念拡張の一つの形として接続的な発展、すなわち、内容がより豊富になりながら、前段階と何等かの意味で同質な場合がある。どのような条件下である概念拡張が同質的、あるいは妥当で自然なものと考えられるのだろうか。この問いに具体的な数学観に基づいて答えることが本論の目的である。

そのような数学観として１９世紀と２０世紀における主要な様式をそれぞれ考察する。その一つは１８５４年のデデキントの「大学教授資格取得講演」(『資格論文』と略記）における「数学における新しい関数の導入について」で表明されているものであり、もう一つは１９５０年にアメリカ数学連合誌に掲載されたブルバキの論説「数学の建築術」(『建築術』と略記）で表明されているものである。それらは筆者の数学活動から生じた疑問への一つの答えとしての意味を持つ。本論の問題の起源は連続体上の計算可能性問題の三つの研究方法にある。三方法とは、”極限再帰関数”によるもの、”実効的一様位相”によるものおよび”計算可能性構造をもつ関数空間論”によるものである。

連続体上の計算可能性問題とは、数学の諸対象を”計算”の観点から特徴付ける研究分野である。計算可能実数など基礎になる領域における計算可能性の定義の後に、その上の連続関数の計算可能性概念が定義され、研究者たちの間で古くからその妥当性が合意されている。

他方多くの有用な不連続関数にも何等かの意味の計算概念を付与することが望まれた。しかし不連続関数については連続の場合とは異なる視点で計算可能性を考えなければならなかった。そのためにいくつかの方法論が開発された。上記三種はその一部である。

これらの方法論の採用がアドホックでないことを示すためには、それらにおける計算可能性概念が連続関数の場合から不連続関数の場合に自然に接続することの説明が必要なのである。上記二つの概念拡張の様式の分析の結果、

三方法論のうち前二者はデデキントの ” 発生論的 ” 数学観に適合し、第三の方法論はブルバキの ” 構造理論的 ” 数学観に適合する。一見異質な二つの数学観であるが、概念拡張の妥当性要件として本論で提案する ” 内的必要性 ” と ” 保存性 ” から成る拡張の ” 同質性 ” はどちらにも適用可能なのである。

『資格論文』は妥当な概念発展に関して、科学一般の発展の法則というべき考察から始め、数学の発展もその法則に則ることを述べ、具体的な事例についてその観点の根拠を説明している。

本論では第一に『資格論文』の主張についてその概念の明確化・精密化を目指す。とくにデデキントが概念拡張の妥当性の要件としたと考えられる条件について、さらにその意味を哲学的に明確にし、汎用性のある定式化を行う。『資格論文』で提示される数学の様々な場面における具体例を五場面に分類し、それぞれにおける概念拡張の特性を詳細に記述し分析する。

『資格論文』の中で注目すべき次の趣旨の箇所がある。すなわち、「科学の創造的発展は歴史的事実であるだけでなく、内的必要性に基づくものである。」また、「数学の諸定義は最初は限定された形で登場し、さらなる発展によって定義の一般化が要求される。数学では、定義の拡張において当初の諸定義に関わる概念を特徴付ける法則を普遍妥当とみなす、という原則を適用することによって恣意性が制限される。」そして、「拡張後にも、本来の演算の意味は元の対象領域においては不変でなければならない。」これら三点が含意する条件はそれぞれ ” 内的必要性 ”（innere Notwendigkeit：デデキント自身の表現）、” 形式保存性 ” あるいは ” 法則保存性 ”、そして ” 実質保存性 ” と名付けるのが適切であろう。これらを概念拡張の妥当性の条件として提案し、それらを総合して ” 同質性 ” と名付ける。

『資格論文』で検討されている概念拡張の例は五場面に分類できる。たとえば第二場面は間接的逆演算の導入で、その演算は、それが満たすべき要件によって暗黙的に導入される。その際に領域の拡張が要求される場合がある（正整数上の加法に対する減法と整数の導入等）。また第四場面は既存の演算の、全体領域内での定義域の拡張であり、もとの定義域では演算の意味が不変な場合である（鋭角の三角関数から実数全体への定義域の拡張等）。

各場面における拡張は同質性を満たす。これらの例より分かることは、拡張の必要性は、既存の理論とその上での活動から生じるという意味で ” 内的 ” なのである。デデキントが後に「拡張に際しての異質な概念の排除」と記しているが、それは ” 内的 ” 必要性から可能なのであり、拡張の動機を内的必要性に限定すれば、異質な概念は入り込まない。保存性とは新理論が初期理論と断然せずにつながって首尾一貫していることである。その意味でヒルベルトがデデキントの数学観を発生論的（genetisch）、すなわち数学の発展を妥当な概念拡張と捉えている、と見たのは正しかったと考えられる。

同質的拡張の例は現代数学にも多くみられる。本論ではリーマン積分からルベーグ積分への概念拡張や証明論的順序数の拡張などについて解説する。

当研究の起源である不連続関数の計算可能性については、”実効的一様位相”の方法と”極限再帰関数”の方法による拡張が発生論的な様式で同質性を持つことを示す。

第二にブルバキ構造理論における概念拡張の仕組みを『建築術』に沿って考察する。『建築術』は、異なる諸数学理論間に存在する共通項の系統的研究という内的進化が、我々を公理的方法へと導いた、と言う。ブルバキの数学論の核心は”構造”概念である。構造とは個別の数学理論から個別性を捨象して得られる、多くの理論に共通な性質の公理的規定と言える。公理を増やすにしたがって下部構造が定義される。

構造理論における概念拡張の同質性は次のように述べることができる。初期理論が、ある構造に属し、その上の演算あるいは関係（性質）に関して理論の拡張という内的必要性が生じたとする。それに応じて定義される新理論が初期理論の所属する構造に公理を付加した下部構造に所属するとき、この拡張は同質的、と見なしてよい。内的必要性は当然成り立っており、理論の法則は構造の法則として形式的に継承されるとともに、初期理論の要素も演算も新理論の中に同じ形で埋め込まれる。したがって形式保存も実質保存も成り立っている。

公理的に見れば、伝統的な分野の仕切りが無意味になる。新しい編成原理は構造の階層であり、それは単純なものから複雑なものへ、一般的なものから個別のものへと進む。しかし『建築術』は、このような記述は数学の実際の状態の大まかな近似に過ぎず、図式的で理想化されているとともに凍結されている、と警告することを忘れてはいない。同質性の確認の際にも柔軟性を保つように気をつけなければならない。

構造理論的方法論における計算可能性研究については、Pour-El & Richards の視点（PR と略記）が示唆に富む。それは古典的バナッハ空間という構造に、計算可能性構造と呼ばれる、その領域の点列の部分集合に関する公理を付加することによって下部構造を定義し、その構造に関する理論を展開することであった。

連続関数と不連続関数を区別しない計算可能性の妥当な定義のためには、バナッハ空間が適している。その際に PR は、実・複素変数の計算可能関数をベースに古典数学はすべて認めて出発する。「計算可能バナッハ空間を作るのではない」と断言している。それは我々の計算可能性研究におけるスタンスでもある。

PR によれば、バナッハ空間の点列の族が”計算可能性構造”であるために次のことが要請される。バナッハ空間は線形であるから、線形性の公理（公理１）、完備であるから、完備性の公理（公理２）、そしてノルムをもつから、ノルムの公理（公理３）が必要である。実際これらで十分である。そして意味のある計算可能性構造の一意性を主張する”安定性補助定理”が証明される。その意味で、抽象的な計算可能性構造の定義が”計算可能性”としての

意味をもつのである。

デデキントの発生論的数学観とブルバキの構造理論的数学観は一見かなり異なる様式であるが、我々の連続体上の計算可能性研究を支える原理としてはこの両者が必要だったのであり、双方ともに概念拡張の同質性の付与が可能なのである。

しかし数学観は突然変化するわけではない。デデキントからブルバキまでの変化を概観することによって、二者それぞれの数学観の特徴をより明らかにし、本論の主題である概念拡張の同質性にもさらなる意味を与えることができると考える。

デデキントは、算術はそれ自体から発展すべきこと、異質な概念を算術に持ち込む理由はないこと、有理数だけを使って無理数の完全な定義を与える努力をしなければならないことを主張する。さらにデデキントが算術（代数、解析）は論理の一部分だというのは、数の概念を空間と時間の概念あるいは直観から独立に考察する、という意味であり、算術は純粋な思考の法則の直接的産物である、ということだ。ただし、数学すべてが論理そのものから構成されるという意味合いでは全くない。

次にヒルベルトは ” 無矛盾性イコール存在 ” という数学哲学を宣言している。ヒルベルトの数学論の中心は論理であった。さらに、概念の骨組みは、その知識部門のいくつかの特別な命題を基礎にして、それらのみから論理的に十分組み立てることができる」とも言う。これら特別な命題がデデキントにおける法則に対応する、と見てよいだろう。

ヒルベルトは幾何学にも算術にも公理を設定している。デデキントも群等の公理を導入している。しかしブルバキが指摘するように、彼等の公理は個別の体系に対して設定された一意的なものであり、普遍的な構造の公理ではなかった。

構造理論的数学観については、Corry の視点を借りれば、Hilbert-van der Waerden-Bourbaki の系譜で構造理論の萌芽から部分的構造理論、そして完成へと変遷した。ただしこの系譜は代数学を通る道筋である。他の多くの分野も総合して構造理論によって数学のテキストを著したのがブルバキであった。

デデキントとブルバキの数学の概念拡張に関する理解様式は、数学の発展の捉え方、という哲学的観点から見れば、基本的な相違がある。しかしどちらにも数学概念の発展の同質性という特徴を付与可能なことは既に議論してきた通りである。その事情は計算可能性という概念を付加しても変わらない。

本論では数学における概念拡張の認識の二つの様式、すまわちデデキントの発生論的数学観とブルバキの構造理論的数学観を検討し、妥当な概念拡張の原理を求めた。その原理として、拡張の ” 同質性 ” を提案した。同質性とは、概念拡張が内的必要性によって生じることと、形式保存性と実質保存性という二つの保存性を満たすこと、である。それぞれの様式において同質性の条件が語られた。概念拡張の妥当性とは、拡張前と拡張後の理論が自然な

接点をもつことと考えられ、同質性はその保証をするのである。このような研究の起源は、筆者等の計算可能解析学の研究に由来する。実数上の連続関数の計算可能性には自然な定義があり、広く合意されてきた。計算可能性概念を不連続関数にも拡張する研究方法はいくつかある。それらがアドホックでなく自然な拡張であることが、同質性原理によって説明されたのである。